**Динамическое программирование**

Довольно часто на олимпиадах встречаются задачи, провоцирующие к применению алгоритмы перебора. Но простой подсчет числа вариантов убеждает в неэффективности такого подхода. Для решения таких задач используется метод динамического программирования. Суть его заключается в том, что для отыскания решения поставленной задачи решается похожая (или похожие), но более простая. При этом осуществляется переход к еще более простым и так далее, пока не доходят до тривиальной.

Из предыдущего рассуждения видно, что решение можно оформить рекурсивно. Но простое применение этого приема очень легко может привести к переполнению стека. Необходимо позаботиться об оптимизации рекурсивных проходов и не вычислять одно и то же значение несколько раз, сделать так называемое отсечение. Можно вообще отказаться от рекурсии и решать задачу "наоборот" — прежде "решить" тривиальные случаи, а затем переходить ко все более сложным. В авторских решениях подобных задач почти всегда встречается второй путь (он несколько быстрее), но в этом занятии рассмотрим оба — первый гораздо доступнее для понимания.

Для решения таких задач существует специальная теория, большая заслуга в ее создании принадлежит Р.Беллману. В общем виде она достаточна сложна, поэтому здесь не рассматривается. В то же время конкретные задачи, рассмотренные ниже, вполне могут сформировать (хотя бы на интуитивном уровне) идеи, лежащие в основе решения задач данного класса.

Первые две задачи, строго говоря, нельзя отнести к указанному классу, но приемы, использованные при их решении, очень сходны с таковыми у задач, рассматриваемых на этом занятии. Остальные задачи в свое время встречались на различных олимпиадах (а некоторые с тех пор стали "фольклорными") и расположены (по мнению автора публикации) в порядке возрастания сложности. Для простоты будем считать, что в большинстве задачах исходные данные таковы, что результат поместится в тип LongInt. Справедливости ради отметим, что такое ограничение существует не всегда, и в последних двух задачах приходится либо использовать тип Double, либо дополнительно реализовывать "длинную арифметику".

Числа Фибоначчи

Вычислить N-ое число в последовательности Фибоначчи, — 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... — в которой первые два члена равны единице, а все остальные представляют собой сумму двух предыдущих.

Формат входных данных

Одно число 0<N<47.

Формат выходных данных

Одно число — N-ый член последовательности.

Мячик на лесенке

На вершине лесенки, содержащей N ступенек, находится мячик, который начинает прыгать по ним вниз, к основанию. Мячик может прыгнуть на следующую ступеньку, на ступеньку через одну или через 2. (То есть, если мячик лежит на 8-ой ступеньке, то он может переместиться на 5-ую, 6-ую или 7-ую.) Определить число всевозможных "маршрутов" мячика с вершины на землю.

Формат входных данных

Одно число 0<N<31.

Формат выходных данных

Одно число — количество маршрутов.

Черепашка

На квадратной доске расставлены целые неотрицательные числа. Черепашка, находящаяся в левом верхнем углу, мечтает попасть в правый нижний. При этом она может переползать только в клетку справа или снизу и хочет, чтобы сумма всех чисел, оказавшихся у нее на пути, была бы максимальной. Определить эту сумму.

Формат входных данных

Первая строка — N — размер доски.

Далее следует N строк, каждая из которых содержит N целых чисел, представляющие доску.

Формат выходных данных

Одно число — максимальная сумма.

Робот

В исследовательской лаборатории фирмы Robots&Co разработали новую модель робота. Главной особенностью данной модели робота является то, что он работает по заранее заданной программе, в которой могут присутствовать команды: сделать шаг на Юг, на Север, на Восток или на Запад. Робот исполняет программу строго последовательно и, дойдя до конца программы, останавливается. Специалисты из Robots&Co заинтересовались вопросом, сколько существует различных программ, состоящих из K инструкций, таких, что робот, выйдя из начала координат, придет в точку с координатами (X, Y). Оси координат располагаются параллельно сторонам света, и единица измерения, соответствует одному шагу робота. Напишите программу, которая дает ответ на этот вопрос.

Формат входных данных

Во входном файле находятся три числа K, X и Y (0<=K<=16, |X|, |Y| <= 16), разделенные пробелами.

Формат выходных данных

В выходной файл ваша программа должна поместить одно число — количество программ для робота.

Взрывоопасность

При переработке радиоактивных материалов образуются отходы двух видов — особо опасные (тип A) и неопасные (тип B). Для их хранения используются одинаковые контейнеры. После помещения отходов в контейнеры, последние укладываются вертикальной стопкой. Стопка считается взрывоопасной, если в ней подряд идет более двух контейнеров типа A. Для заданного количества контейнеров N определить число безопасных стопок.

Формат входных данных

Одно число 0<N<31.

Формат выходных данных

Одно число — количество безопасных вариантов формирования стопки.

К-ичные числа

Требуется вычислить количество N-значных чисел в системе счисления с основанием K, таких что их запись не содержит двух подряд идущих нулей.

Ограничения: 2<=K<=10, N + K<=18.

Формат входных данных

Числа N и K в десятичной записи, разделенные пробелом или переводом строки.

Формат выходных данных

Искомое число в десятичной записи.

Подпалиндром

Палиндромом называется строка, которая одинаково читается как слева направо, так и справа налево. Подпалиндромом данной строки называется последовательность символов из данной строки, не обязательно идущих подряд, являющаяся палиндромом. Например, HELOLEH является подпалиндромом строки HTEOLFEOLEH. Напишите программу, находящую в данной строке подпалиндром максимальной длины.

Формат входных данных

Строка длиной не более 100 символов, состоящая из заглавных букв латинского алфавита.

Формат выходных данных

В первой строке вывести длину максимального подпалиндрома, а во второй строке сам максимальный подпалиндром. Если таких подпалиндромов несколько, то вывести любой из них.

Паровозики

N локомотивов, имеющих номера от 1 до N и установленных на железнодорожную колею, начинают двигаться в одну сторону, причем локомотив номер k изначально движется со скоростью k км/ч. Если локомотив, движущийся с большей скоростью, нагоняет более медленный локомотив, дальше они движутся один за другим со скоростью впереди идущего локомотива. Очевидно, через некоторое время после начала движения локомотивы разобьются на несколько групп, движущихся с разной скоростью.

Написать программу, определяющую, сколько начальных расстановок s из N! Возможных дадут в результате p групп движущихся локомотивов.

Формат входных данных

Два числа — 0 < N < 17 и 0 < p < N + 1.

Формат выходных данных

Одно число — s.

Плитки

У Пети имеется неограниченный набор красных, синих и зеленых плиток размером 1 \* 1. Он выбирает ровно Nплиток и выкладывает их в полоску. Например, при N=10 она может выглядеть следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| К | К | К | С | З | К | К | З | К | С |

(буквой К обозначена красная плитка, С — синяя, З — зеленая).

После этого Петя заполняет следующую таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Красный | Синий | Зеленый |
| Красный | Y | Y | Y |
| Синий | Y | N | Y |
| Зеленый | Y | Y | N |

В клетке на пересечении строки, отвечающей цвету А, и столбца, отвечающего цвету Б, он записывает "Y", если в его полоске найдется место, где рядом лежат плитки цветов А и Б и "N" в противном случае. Считается, что плитки лежат рядом, если у них есть общая сторона. (Очевидно, что таблица симметрична относительно главной диагонали — если плитки цветов А и Б лежали рядом, то рядом лежали и плитки цветов Б и А.) Назовем такую таблицу диаграммой смежности данной полоски.

Так, данная таблица представляет собой диаграмму смежности приведенной выше полоски.

Петя хочет узнать, сколько различных полосок имеет определенную диаграмму смежности. Помогите ему.

(Заметьте, что полоски, являющиеся отражением друг друга, но не совпадающие, считаются разными. Так, полоска

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| С | К | З | К | К | З | С | К | К | К |

не совпадает с полоской, приведенной в начале условия.)

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит число N (1<=N<=100). Следующие три строки входного файла, содержащие по три символа из набора {"Y", "N"}, соответствуют трем строкам диаграммы смежности. Других символов, включая пробелы, во входном файле не содержится. Входные данные корректны, т.е. диаграмма смежности симметрична.

Формат выходных данных

Выведите в выходной файл количество полосок длины N, имеющих приведенную во входном файле диаграмму смежности.

**Список литературы**

Е.В. Брызгалов. Динамическое программирование.